# Tidligere eksamensopgaver

## Eksamen sommeren 2022

### Opgave 1. ( 10 point ) Betragt den følgende basis for R3 givet ved

Bestem koordinatvektoren for til mht. ovenstående basis. Vælg en svarmulighed fra:

A…

B…

C…

D…

E…

Begrund dit svar.

Systemet følger et lineært system, hvor *b* kan beskrives som

Med E som samlingen af vektorerne , så mangles bare, som har samlingen af vektorerne .

I python løses der for dette ligningssystem.

Et billede, der indeholder tekst, skærmbillede, Font/skrifttype

Automatisk genereret beskrivelse

Og bE fås til at være:

Dette resultat er magen til C værdien, så det rigtige resultat er.

====================

====================

Opgave 2. ( 10 point ) Lad være en samling af vektorer i med for alle . Sæt

Hvad kan vi konkludere med sikkerhed? Vælg en svarmulighed fra.

A…

…

D…

Hvad der bliver sagt her er, at hvilken som helst som ikke er skal give 0.

For vektorer til at være ortogonale på hinanden, så gælder der, at deres prikprodukt giver 0.

Derfor kan det siges med sikkerhed, at

============================

B: Matricen er en ortogonalmatrix

============================

Gram matricen er en matrice af alle de mulige indre produkter af vektorerne. Da alle indre produkter giver 0, så er grammatricen en matrix med nuller i.

Da er grammatricen ikke en identitetsmatrix.

For en diagonal matrix gælder det, at alle elementer udenfor diagonalen er nul. For en nul matrice er dette sandt √.

Elementerne på diagonalen må enten være nul eller være andet end nul, så dette er også sandt √.

Så på den måde må det også gælde at.

====================================

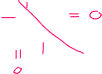
C: Grammatricen for B er en diagonalmatrix.

====================================

Hvad jeg skal tage med

Grammatricen:

Som danner et ydre produkt, så denne ville have være.



Hvis så kan det siges, at matricen er en kvadratisk matrix og disse matricer er invertibel.

For er B ikke invertibel. Det kan altså ikke siges med sikkerhed om B er invertibel.

Konklusion:

============================

B: Matricen er en ortogonalmatrix

C: Grammatricen for B er en diagonalmatrix.

====================================

### Opgave 3. ( 10 point ) Lad A være matricen

Bestem en basis for nulrummet af A. Vælg en svarmulighed blandt følgende:

A…

…

D…

Begrund dit svar.   
Fra notesæt 18 om kerne og billedmængder fandt jeg en betegnelse for

Produktet findes og sættes lige med 0.

Med lidt ligningsberegninger:

Så findes for

kunne være .

Hvad jeg kommer tættest på er B:

Hvor den første vektor opfylder, at . Det gælder dog ikke for den anden vektorer.

### Opgave 4. ( 10 point ) Givet vektorer *u* og *v* i med , beregner den følgende funktion projektionen af *u* langs *v*:

Hvor mange flops bruges der i beregningen? Vælg en svarmulighed fra:

Tabel 5.1: Omkostninger ved vektor- og matrixberegninger bruges som hjælp.

Vektorerne består af . For at lave et vektorprodukt, bliver den ene transponeret, så dens ligning bliver .

En række-søjle operation kræver , hvor

Så tælleren kræver 200 flops.

I nævneren er det det samme, bare her med rækkesøjle produktet af .

Så nævneren kræver 200 flops.

Nu er det to skalarer i en brøk. Her snakker vi måske, måske ikke om flop. Måske kan den redegøres for at tælle for en flop. Den udelades dog.

Et skalar vektorprodukt kræver:

Så funktionen kræver:

===============

===============

Når resultaterne ses, så bemærkes der, at der ikke er 500 som valgmulighed. 501 er der dog. Jeg undlod at kalde for en flop, men det kan jeg nu se, at dette var forkert.

===============

===============

### Operation 5. ( 20 point ) Betragt de følgende vektorer

#### Beregn vinklen mellem i grader.

Ud fra definition 8.5, så kan beskrives som:

I python beregnes dette til at være

Normalt ville det være det resultat man afleverede, men da der bliver spurgt om det i grader, så findes den inverse til det.

=======================

=======================

#### Ved brug af rækkeoperationer vis at samlingen 𝑢0, 𝑢1, 𝑢2 er lineært uafhængig.

Lineært uafhængighed er når den eneste løsning for er hvis alle skalarer .

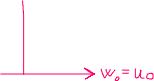
Fra eksempel 14.4 vides der, at hvis alle rækker i u indeholder et pivotelement.

Da har de første 3 rækker et pivotelement, men ud fra eksempel 14.4, ville det her ikke være et pivotelement.

Hvis der gås ud fra, at alle den søjler skal være lineært afhængige, så er dette opfyldt.

#### Brug Gram-Schmidt processen til at danne en ortonormal samling𝑣0,𝑣1,𝑣2, der udspænder det samme rum som 𝑢0, 𝑢1, 𝑢2.

Ved at lave en ortonormal samling, v0, v1, v2, skal vi først finde de vektorer som er ortogonale på u.



Det er denne fremgangsmåde vi tager. Projektionen til hver vektor under den nye vektor trækkes fra vektoren.

For simpelhedens skyld sættes skalaren til at være 2.

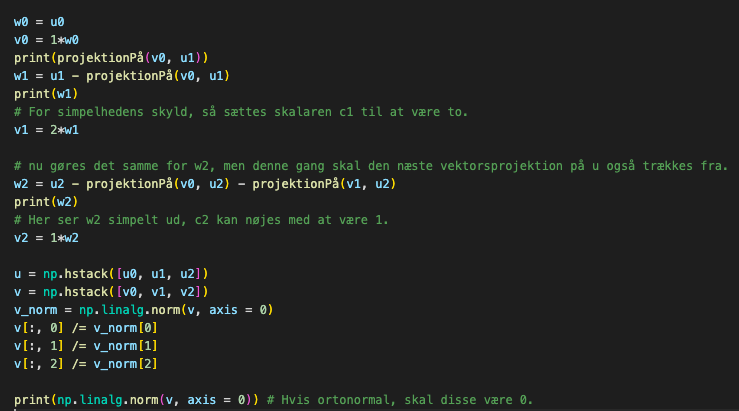
Det samme gøres for w2, nu trækkes projektionen fra v0 til u2, men også v1 til u2, fra u2.

sættes til at være 1.

Samlingerne v er nu en ortogonal samling.

For at gøre den ortonormal, så skal hver vektor være en enheds vektor.

Jeg gør det hele i python med min kode:



Med resultatet til sidst:

Så basen er nu blevet til en enhedsvektor.

========================

========================

Den ortonormale basis er for u er nu fundet.

### **Opgave 6.** (20 point) Betragt de følgende datapunkter

Der ønskes et andengradspolynomium *𝑝*(*𝑥*) = *𝑏𝑥*2 + *𝑐𝑥* + *𝑑* der går igennem datapunkterne. Dette svarer til et lineært ligningssystem *𝐴𝑤* = *𝑣* med *𝐴* repræsenteret af np.vander(x, 3).

#### Angiv størrelsen af matricen 𝐴 og vektorerne 𝑤 og 𝑣. Derefter forklar hvordan 𝑤 og 𝑣 i ligningen 𝐴𝑤 = 𝑣 svarer til datapunkterne og funktionen 𝑝(𝑥).

Disclaimer til denne opgave:

Opgaven havde været simpelt, hvis der kun havde været 3 punkter, svarende til den et andengradspolynomium. . Opgaven ønsker, at et andengrads polynomium går igennem 7 datapunkter. A bliver da rektangulær og dermed ikke invertibel. Det ses, at der skal approksimeres senere. Lad os se på hvad vi har nu:

er de x værdier der skal til for at er lige med vektoren *v* af *y* værdier.

#### Brug python til at bestemme singulærværdierne af 𝐴 og brug dette til resultatet til at beregne konditionstallet 𝜅(𝐴).

Konditionstallet af *A* findes ved .

I python:

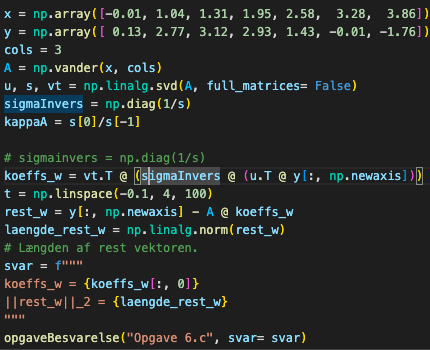


#### Ved brug af singulærværdidekomponering, bestem i python den mindste kvadraters løsning til systemet 𝐴𝑤 = 𝑣 og beregn længde af restvektoren. MINDSTE KVADRATTERS METODE

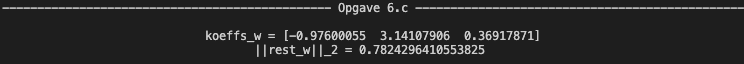
På side 223 i notesættet står tabellen med løsningsforslag til mindste kvadratters metode.

Nu er det bare hovedet under armen og så komme i gang.

Min python kode:



Og resultatet blev:



Længden af restvektoren er da

=========================

#### Brug python til at lave en plot med datapunkterne og det andengradspolynomium bestemt af din løsning til del (c).

Et plot af datapunkterne samt, , en vander matrice bliver da lavet af t med 3 rækker og bliver prikket med koefficienterne.

Resultatet blev.



### Opgave 7. ( 20 point ) Lad A være matricen

#### Uden brug af python eller lignende, vis at er en egenværdi for A og bestem en tilhørende egenvektor .

Egenværdierne findes ved ligningen det(A - lambda) = 0.

Den måde, som jeg har lært at finde determinanten på er at lægge alle værdier på diagonalen sammen og trække alle værdier modsat diagonalen fra.

Nu har vi en ligning:

Vi kan prøve at vise, at skulle være en egenværdi.

Så 5 er en egenværdi for A.

Vi kan nu finde dens tilsvarende vektor ved at indsætte den i matricen.

-> ->

Så er løsningen til *x* & *y* fundet, z er en fri variabel.

Hvis jeg sætter til at være 11:

Hvis y kommer først, så hedder vektoren:

Og skalerer

Det resulterede ikke i noget godt.

Lad os gennemtjekke det igen.

Så matricen skal ligne

Kan det lade sig gøre her?

Jeg kan ikke se det.

Jeg går videre til noget andet.